Activité 3 – Optimiser un bénéfice

Un artisan fabrique et commercialise des petits objets décoratifs personnalisés qu'il fabrique à la demande pour les clients qui se présentent à sa boutique. Il est capable d'en fabriquer entre 1 et 8 par jour. Son bénéfice quotidien en euros est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[1;8]$ par $f(x)=300\ln(x)-100x+100$ où x est le nombre d'objets fabriqués chaque jour.

Problématiques :
① Combien d'objets faut-il fabriquer et vendre chaque jour pour obtenir le bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?
② Combien d'objets faut-il fabriquer et vendre chaque jour pour obtenir un bénéfice d'au moins 80 € ?

1. Calculer le bénéfice obtenu si 5 objets son vendu sur la journée. **Arrondir** au centième.

2. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f. **Arrondir** à l'unité.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$					83			

3.1. Montrer que la fonction dérivée de f est donnée par la relation $f'(x)=\dfrac{300-100x}{x}$.

3.2. Résoudre sur l'intervalle $[1;8]$ l'équation $f'(x)=0$.

3.3. Étudier sur l'intervalle $[1;8]$ le signe de la fonction f'.

3.4. À l'aide des réponses aux questions précédentes, **compléter** le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1;8]$.

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

4.1. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f.

Fenêtre graphique :
$Xmin=1$; $Xmax=8$; $Xgrad=1$.
$Ymin=-80$; $Ymax=140$; $Ygrad=20$.

4.2. Vérifier que la courbe obtenue est cohérente avec le tableau de variations obtenu à la question 3.4.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geqslant 80$. **Donner** la solution sous la forme d'un intervalle. **Arrondir** les bornes au centième.

6. Répondre aux problématiques.

7.1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$. **Arrondir** les solutions au centième si nécessaire.

7.2. Vérifier les résultats à l'aide du solveur de la calculatrice.

7.3. Interpréter les réponses à la question 7.1.

Exercices

Exercice 1

Lors du lancement d'un nouvel ordinateur, on a relevé les ventes sur la première semaine dans un magasin spécialisé. À la suite d'une analyse statistique un modèle de l'évolution du nombre de ventes sur les 60 premiers jours a été déterminé. On considère donc que le nombre d'ordinateurs vendus par jour peut être modélisé pour $x\in[1;60]$ par la fonction f telle que $f(x)=8\ln(x)+35$ où x est le nombre de jours.

Problématique :
Combien de temps faut-il pour dépasser 60 ventes par jours ?

1. Calculer le nombre d'ordinateurs vendu le dixième jour. **Arrondir** à l'unité.

2.1. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f. **Arrondir** à l'unité.

x	1	10	20	30	40	50	60
$f(x)$		53					

2.2. À l'aide du tableau, **donner** une encadrement, le plus petit possible du jour pour lequel le nombre de ventes dépassera 60. **Justifier** la réponse.

3.1. Déterminer la fonction dérivée de f.

3.2. Étudier sur l'intervalle $[1;60]$ le signe de la fonction f'.

3.3. À l'aide des réponses aux questions précédentes, **compléter** le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1;60]$.

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

4.1. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f.

Fenêtre graphique :
$Xmin=1$; $Xmax=60$; $Xgrad=5$.
$Ymin=30$; $Ymax=70$; $Ygrad=5$.

4.2. Vérifier que la courbe obtenue est cohérente avec le tableau de variations obtenu à la question 3.3.

5.1. Résoudre algébriquement l'équation $f(x)=60$. **Arrondir** au centième.

5.2. Vérifier que la résolution graphique de $f(x)=60$. donne la même réponse que la question 5.1.

6. Répondre à la problématique.

Exercice 2

Dans une entreprise qui fabrique des meubles en chêne, le coût de revient journalier exprimé en milliers d'euros est donné par $C(x)=2+\ln(x)$ où $x\in[1;20]$est le nombre de meubles fabriqués. Chaque meuble est vendu 500 €.

Problématique :
Combien de meubles faut-il fabriquer et vendre pour que l'entreprise soit rentable ?

1.1. Calculer le coût de revient de 6 meubles. **Arrondir** au centième.

1.2. Calculer la recette obtenue par la vente de 6 meubles.

1.3. Indiquer si l'entreprise est bénéficiaire en produisant et vendant 6 meubles.

2.1. Déterminer en fonction de x l'expression qui donne la recette $V(x)$ en milliers d'euros.

2.2. Déterminer en fonction de x l'expression qui donne le bénéfice $B(x)$ pour la fabrication et la vente de x téléviseurs. On rappelle que $B(x)=V(x)-C(x)$.

3.1. Déterminer B', la fonction dérivée de B puis **montrer** que $B'(x)=\frac{0,5x-1}{x}$.

3.2. Étudier sur l'intervalle $[1;20]$ le signe de la fonction B'.

3.3. À l'aide des réponses aux questions précédentes, **compléter** le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[1;20]$.

x	
$B'(x)$	
$B(x)$	

3.4. En s'appuyant sur le tableau de variations, indiquer le nombre de solutions de l'équation $B(x)=0$.

4.1. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction B.

Fenêtre graphique :
$Xmin=1$; $Xmax=20$; $Xgrad=2$.
$Ymin=-2$; $Ymax=6$; $Ygrad=1$.

4.2. Vérifier que la courbe obtenue est cohérente avec le tableau de variations obtenu à la question 3.3.

4.3. Vérifier que le nombre de solutions de l'équation $B(x)=0$ est cohérent avec la réponse donnée à la question 3.4.

5. Résoudre graphiquement l'équation $B(x)=0$. **Arrondir** au centième.

6. Répondre à la problématique.

Exercice 3

Samir envisage de placer une partie de ses économies en achetant des actions d'une entreprise écoresponsable cotée en bourse.
À partir du relevé des prix de cette action, Samir a pu établir que le prix de l'action, exprimé en euros, peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[1;50]$ par $P(x)=\ln(x^2)+3,18$ où x représente le nombre de jours depuis le début.

Problématique :
Combien de jours faudra-t-il pour que le prix de l'action atteigne 10 € ?

1.1. Calculer $P(25)$. **Arrondir** au centième.

1.2. Interpréter le résultat de la question 1.1.

2.1. Déterminer P', la fonction dérivée de P.

2.2. Étudier sur l'intervalle $[1;50]$ le signe de la fonction P'.

2.3. À l'aide des réponses aux questions précédentes, **compléter** le tableau de variations de la fonction P sur l'intervalle $[1;50]$.

x	
$P'(x)$	
$P(x)$	

3.1. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction P.

Fenêtre graphique :
$Xmin=1$; $Xmax=50$; $Xgrad=5$.
$Ymin=0$; $Ymax=12$; $Ygrad=1$.

3.2. Vérifier que la courbe obtenue est cohérente avec le tableau de variations obtenu à la question 2.3.

4.1. Résoudre algébriquement l'équation $P(x)=10$. **Arrondir** au dixième.

4.2. Résoudre graphiquement l'équation $P(x)=0$. **Arrondir** au dixième.

5. Répondre à la problématique.